1. 考虑欧氏空间$\mathbb{R}^n$，其元素是列向量。对$n\times n$实矩阵空间$M_n(\mathbb{R})$中的任一元素M，定义$\|M\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Mx\|$，$x\in\mathbb{R}^n$。命$GL_n(\mathbb{R})$ 为$n\times n$可逆实矩阵群，G是$GL_n(\mathbb{R})$的子群，包含在单位开球中：

$$B(I,1)=\{M\in M_n(\mathbb{R})\mid \|M-I\|<1\}.$$

(a) 设$g\in G$，$\lambda\in\mathbb{C}$是g的一个特征根，证明$|\lambda-1|<1$.

(b) 证明g有唯一的复特征根，其值等于1.

(c) 证明$g=I$.

2. 设G 是$GL_n(\mathbb{Z})$的有限子群，$p\geq 3$是素数，$\mathbb{F}_p$ 是p元域。

(a) 证明：自然映射$GL_n(\mathbb{Z})\to GL_n(\mathbb{F}_p)$ 在G上的限制是单射。

(b) 设$M\in GL_2(\mathbb{Z})$ 是阶为$m<\infty$ 的元素，证明: $m\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

3. 设$f\in\mathbb{R}(x)$ 是有理函数，在整数上取整数值，证明f是多项式。